Řešení PDE pomocí RBF

Interpolace a aproximace neuspořádaných dat,

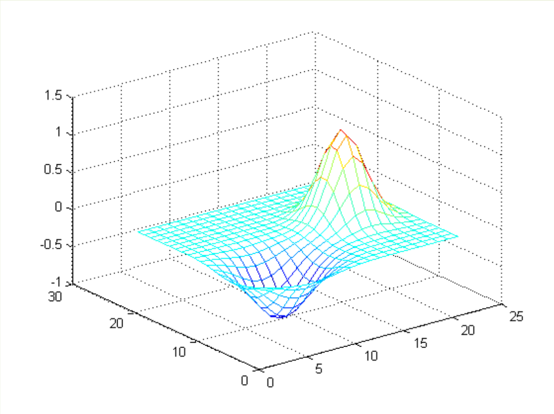
Radiální bázové funkce a jejich aplikace

Ondřej Nedvěd

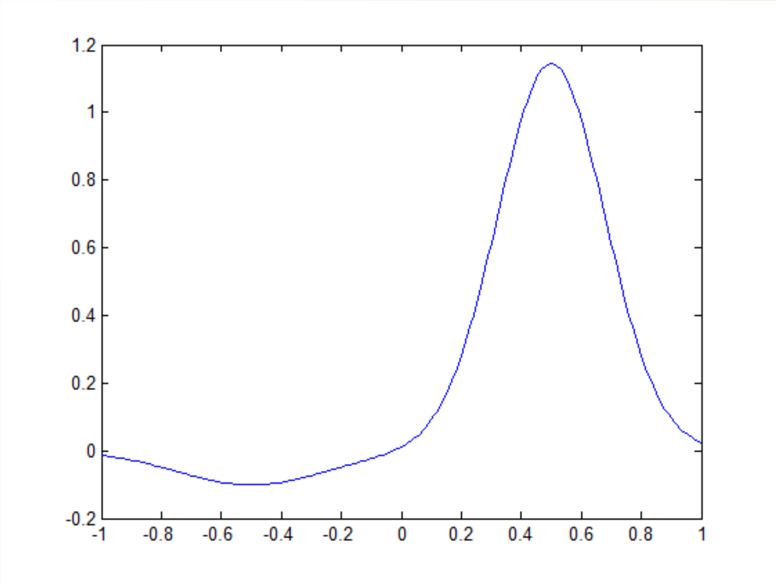
Úloha 1 – gradientní pole

- Je dána množina dvojic $A = \{[\boldsymbol{x}_i, \nabla f(\boldsymbol{x}_i)], \ldots\}$, 2½D problém.
  - $\sum_j \lambda_j \nabla\Phi\left(\|x - x_j\|\right) = \nabla f\left(\boldsymbol{x}_j\right)$
- Pro každý vstupní bod množiny 2 podmínky:
  - $\sum_j \lambda_j \Phi_x(\|x - x_j\|) = \frac{\partial f}{\partial x}, \sum_j \lambda_j \Phi_y(\|x - x_j\|) = \frac{\partial f}{\partial y}$
- Hledáme předpis plochy, který vyhovuje vstupním podmínkám.
  - Soustava rovnic je přeurčená a vede na LSE.
  - Jejím řešením je vektor $\boldsymbol{\lambda}$
- Následuje rekonstrukce, tedy:
  - $\sum_j \lambda_j \Phi\left(\|x - x_j\|\right) = f\left(\boldsymbol{x}_j\right)$

Ověření postupu



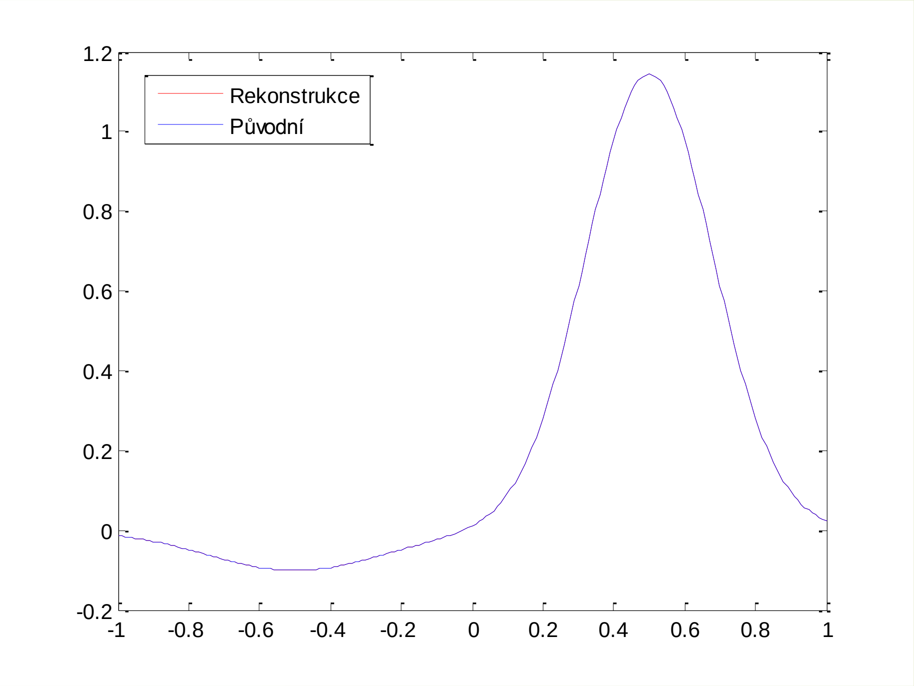
- Byla použita jedna ze standartních testovacích funkcí s oblastí zájmu na intervalu $< -1, 1 >$.
- Jako radiální bázová funkce pak multikvadrika:
  - $\Phi(r) = \sqrt{1 + (\epsilon r^2)}; \quad r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$
- Počet vzorků je zde $N = 200$, tedy diskretizační krok 0.01.



Graf 1: Testovací funkce v průřezu $x = 0$.

Soustava diferenciálních rovnic RBF, žádný šum.

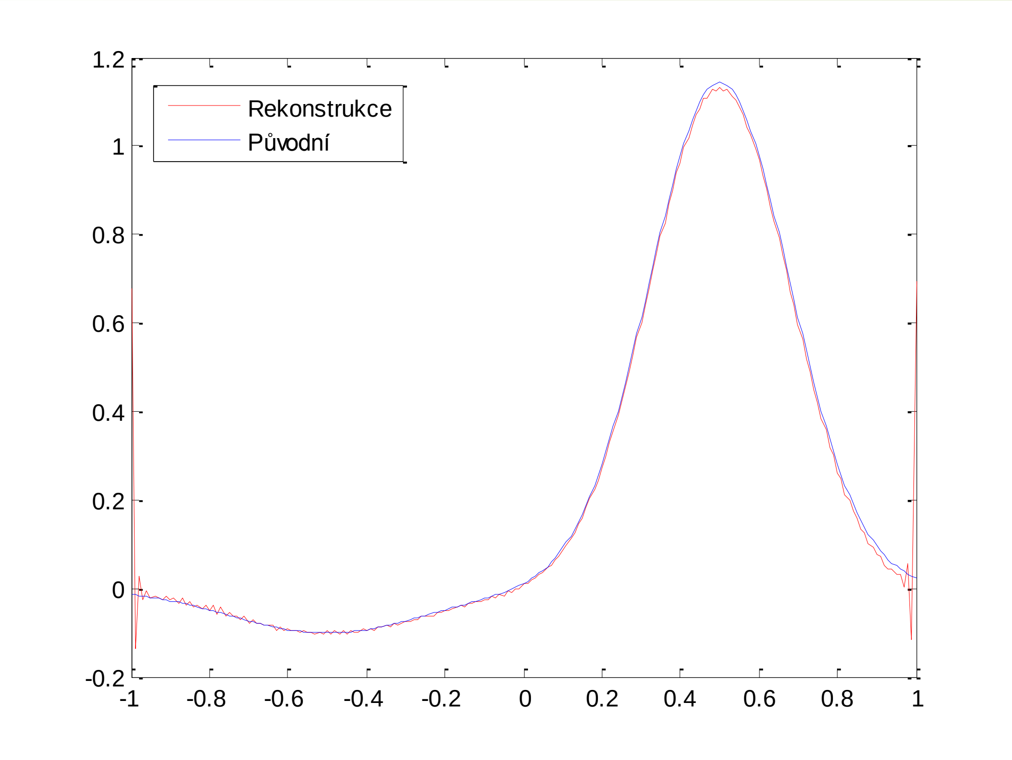
- Řešíme úlohu 1.
- Ideální stav, žádný šum.
- Chyba v řádu 10^{-7}.
- Reciproká podmíněnost soustavy v řádu 10^{-19}.
- Graf rekonstrukce nechybí, pouze splývá s původním.



Graf 2: Průřez řešením soustavy PDE pomocí RBF.

Soustava diferenciálních rovnic RBF, přidán šum.

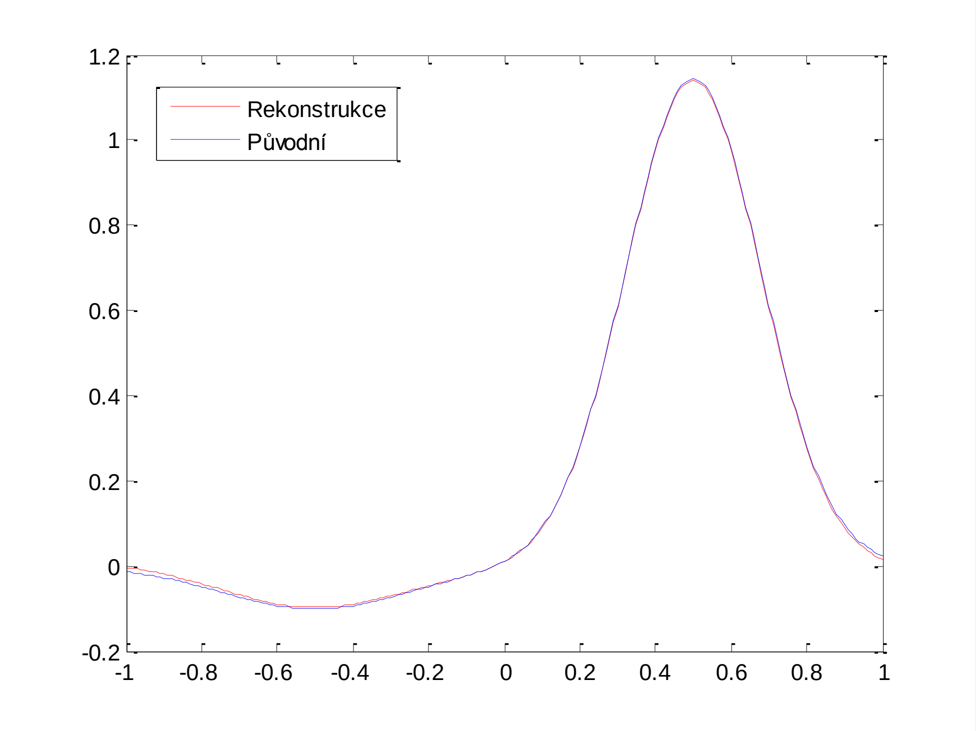
- Šum normálního rozložení o magnitudě 10^{-2}.
- Na okrajích se vyskytlo zcela nepřípustné rozkmitání.
- Je zapotřebí jiný přístup.



Graf 3: Průřez řešením zašuměné soustavy PDE pomocí RBF.

Soustava diferenciálních rovnic RBF, stabilizace

- Okraj byl rozšířen a po řešení byl výsledek o onen okraj oříznut.
- Odstraněno rozkmitání na okrajích.
- Místo přímé inverze použita iteračn metoda „Generalized Minimum Residual“ - GMRES.
- Šum řádu 10^{-2}.
- Chyba v řádu 10^{-2}.
- Hladký výstup.



Graf 4: Průřez řešením zašuměné soustavy PDE pomocí RBF, iterační přístup.

Praktické výsledky

- Tento přístup byl uplatněn například pro získání 3D povrchu mincí pomocí skeneru. [sc2014]

- Vlevo originál, uprostřed normálové pole a vpravo výstup z 3D tiskárny.

Úloha 2 - T-variační: přístup 1

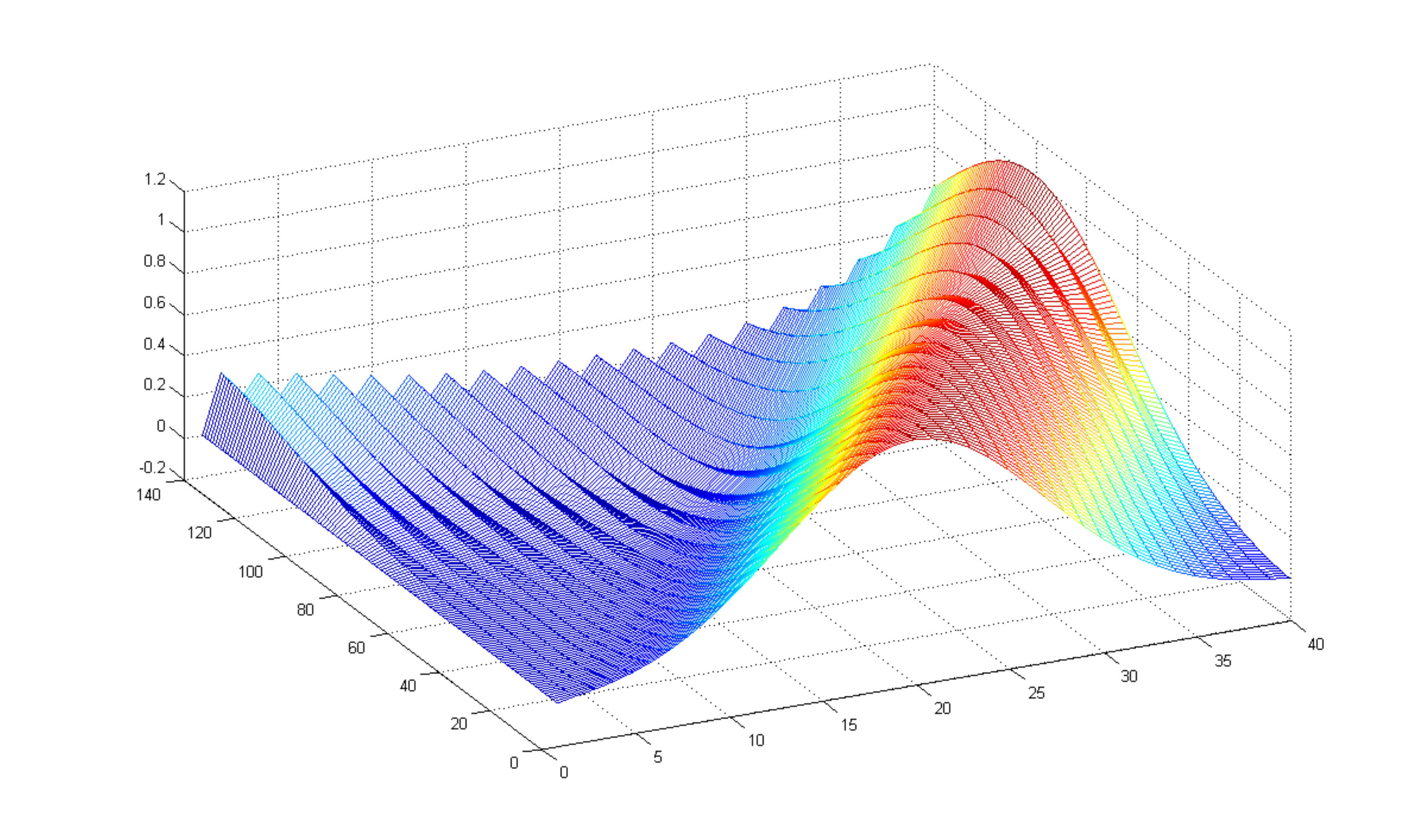
- Zadání jednoduché úlohy $bu_t + au_x = f$
- Pro každý časový okamžik t_i je řešena separátní okrajová úloha.
  - $u_{t+1} = u_t + \frac{\Delta t}{b} \cdot (au_x - f)$
  - Zadané počáteční a okrajové podmínky.
- Po aplikaci RBF:
  - $u_{t+1} = \sum \lambda_i \Phi(r_i) + \frac{\Delta t}{b} \cdot (a \sum \lambda_i \Phi_x(r_i) - f)$
- Po úpravě:
  - $u_{t+1} = \sum \lambda_i \left(\Phi(r_i) + \frac{\Delta t}{b} \cdot (a\Phi_x(r_i) - f) \right)$

Úloha 2 - T-variační: přístup 2

- Zadání jednoduché úlohy $bu_t + au_x = f$
- Postup řešení je prakticky stejný jako u časově neproměnné úlohy:
  - $b\sum \lambda_i \Phi_t(r_i) + a\sum \lambda_i \Phi_x(r_i) = f$
- Čas se v RBF projeví pouze v normě:
  - $\Phi(r);\ \ r(\boldsymbol{x}, t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ \dots + (c \cdot t)^2}$
- Úloha je tedy prakticky „degradována“ na okrajovou úlohu o vyšší dimenzi.
- $\sum \lambda_i \left(b \cdot \Phi_t(r_i) + a \cdot \Phi_x(r_i)\right) = f$

Výsledky bez stabilizace

- Bez stabilizace přístupu 1 je zřetelně vidět chyba:

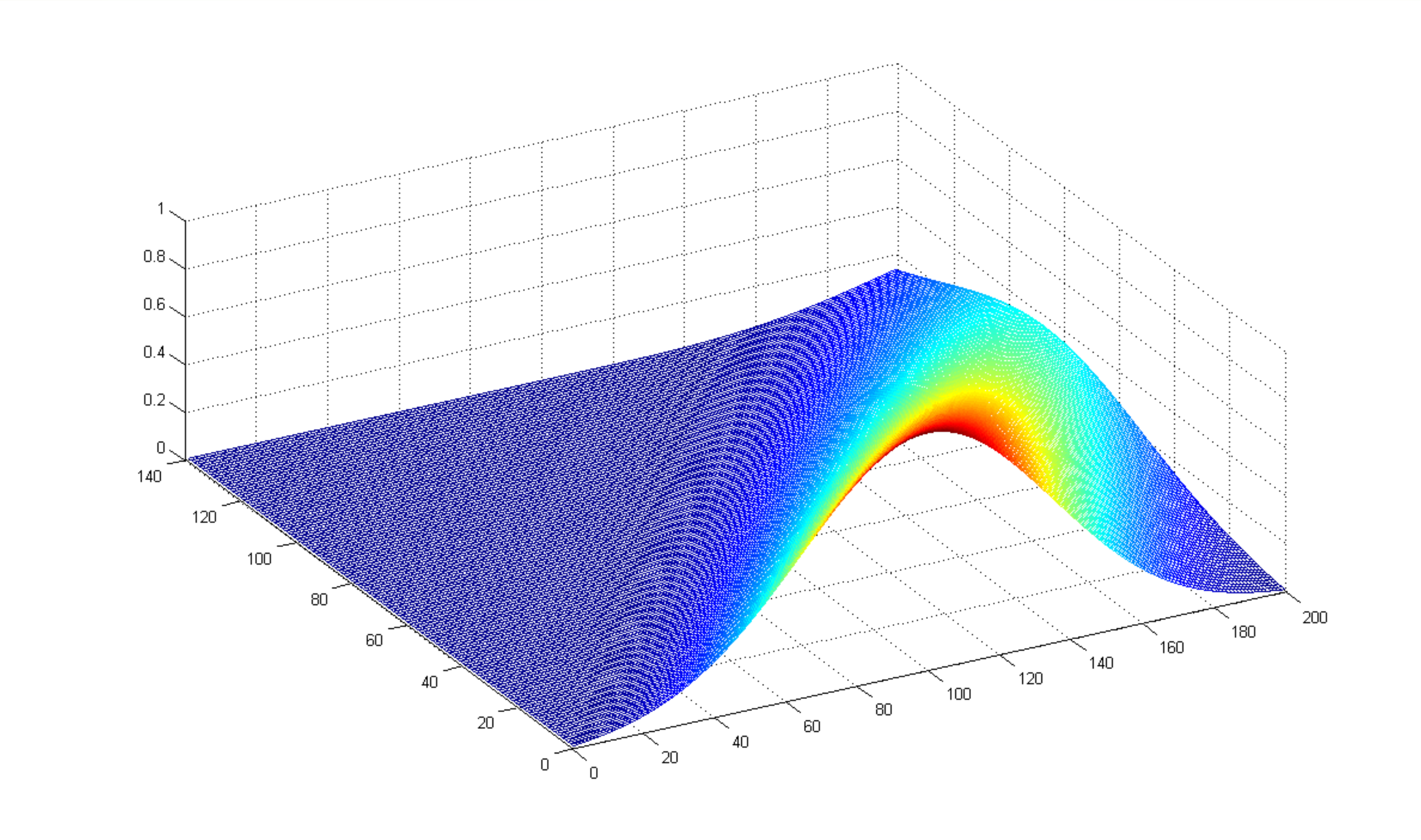


T-variační úlohy – Stabilizace

- Stabilitu řešení lze zlepšit následujícími přístupy:
- Vhodná volba parametru ϵ pro RBF
  - Tj. zlepšit podmíněnost soustavy.
  - Zároveň se však zhorší citlivost bázové funkce → vyhlazení detailů.
- Přidání difuzního členu:
  - $bu_t + au_x - du_{xx} = f$
  - $u_{t+1} = \sum \lambda_i \left(\Phi(r_i) + \frac{\Delta t}{b} \cdot (a\Phi_x(r_i) - d\Phi_{xx}(r_i) - f) \right)$

Výsledky po stabilizaci

- Po přidání difuzního členu (zde s výraznou vahou) dosáhneme:



Literatura

- [Fasshauer 2009] FASSHAUER, Gregory E. *Meshfree approximation methods with MATLAB*. Singapore: World Scientific, c2009, xviii, 500 s. Chapman. ISBN 978-981-270-633-1.
- [sc2014] Skala V., Pan Rongjiang, Nedved O., Making 3D replicas using a flatbed scanner and a 3D Printer, ICCSA, 2014
- [Kansa 1990] Kansa, E. J., "Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics - II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations," Computers & Mathematics with Applications, vol. 19, pp. 147–161, 1990.